

推荐国家自然科学基金项目公示

项目名称	退化型偏微分方程中的若干问题研究
推荐单位	教育部
推荐单位意见： <p>我单位认真审阅了该项目公示材料，确认全部材料真实有效，相关栏目均符合国家自然科学基金材料的填写要求。</p> <p>该推荐项目集中研究如下几类退化型偏微分方程，包括：（1）具生物和医学背景的退化型chemotaxis方程组的初边值问题解的整体存在和爆破；（2）正则和非正则型非线性全特征退化方程解的存在性和发散解的可和性；（3）一类具有物理和几何背景的退化型方程的微局部分析以及最佳正则性；（4）奇异流形上的退化型非线性椭圆边值问题解的存在性和正则性。项目完成人都曾承担或在研多项国家自然科学基金项目，包括国家杰出青年基金（陈化，2001-2004），国家优秀青年基金（李维喜，2015-2017）和国家级重点项目和面上项目等，在退化方程的多个研究领域形成了自己的特色和影响，其研究成果被国内外同行专家多次引用和评述，并得到了国际上同行专家的长期关注和跟进研究。</p> <p>对照国家自然科学基金授奖条件，推荐该项目申报2017年度国家自然科学基金二等奖。</p>	

项目简介:

该推荐项目属于偏微分方程学科. 项目的主要内容集中在研究如下几类退化型偏微分方程, 具体成果包括:

- (1) 得到了退化型chemotaxis方程组的初边值问题解的整体存在和爆破结果. 创新点在于:证明了OS模型在控制方程为线性增长时Othmer-Stevens的猜想成立, 而当控制方程为指数型增长时其猜想不成立,项目完成人的结果证明了这类指数型增长的OS模型的解是极不稳定的, 故而其描绘的生物现象将更为复杂,从而大大丰富了人们对这类具实际背景的理论问题的了解。
- (2) 解决了正则和非正则型非线性全特征退化方程解的存在性和发散解的可和性问题. 创新点在于:将经典的Cauchy-Kowalevskaja定理推广到了一类初始数据给在特征上并且具强奇性的退化方程上,项目完成人的结果从理论上填补了这方面在全特征型强退化方程上研究的空白.特别是对具非正则奇异性的情形, 研究了其形式幂级数解所属解析Gevrey函数类的精确刻画以及解的可和性.
- (3) 研究了一类具有物理和几何背景的退化型方程的微局部分析并证明了其最佳正则性结果. 创新点在于:在研究方法上创新性的将Kohn乘子方法与Rothschild-Stein幂零李群技巧的优点加以推广, 从而推导出最佳亚椭圆估计并用来证明项目完成人的结果. 在Landau方程方面, 项目完成人将Desvillettes与Villani关于解的光滑性效应推广到了解析光滑性效应上;对水波方程,项目完成人的工作改进了Constantin和Escher在2011年发表在Annals of Math.的结果, 将他们要求对旋度函数的解析正则性假设改进到仅要求旋度函数是Hölder连续的; 对退化椭圆型Monge- Ampère方程证明了其解的最佳正则性。
- (4) 研究了奇异流形上的退化型非线性椭圆边值问题解的存在性问题. 创新点在于:首先证明了锥型的Sobolev不等式和Poincare不等式等, 并运用这些新的分析工具以及现代变分理论来证明对应的奇异流形上锥形退化的非线性椭圆边值问题的正解和多解的存在性. 这些结果的建立开创了研究奇异流形上退化型非线性方程的新方向, 并在项目完成人的后续工作中已经被推广到研究更为复杂的楔型 (edge) 和角型 (corner) 奇异流形上的非线性退化方程方面。

该推荐项目共挑选出项目完成人的代表性论文 8 篇(后续的工作还发表了 SCI 论文 34 篇), 这 8 篇论文均发表在国际上本专业最具影响的一流 SCI 刊物上,并得到了国际上同行专家的长期关注和跟进研究. 项目组成员在该项目完成期间共承担国家自然科学基金杰出青年基金 1 项, 国家自然科学基金重点项目 2 项, 国家自然科学基金面上项目 2 项, 以及青年基金 3 项;此外,项目组成员李维喜于 2015 年开始承担国家自然科学基金优秀青年基金 1 项.

客观评价 :(1) 代表作[1]主要是陈化和他的博士生杨茵等人合作的结果。他们的结果不仅证明了Othmer-Stevens当年的猜想一般不再成立,同时还证明了这类指数型增长的OS模型的不稳定性。项目完成人的结果也加深了人们对OS模型的复杂性的认识,并且由于这类模拟具有生物学和医学上的实际背景,故而他们的结果不光在是数学上具有理论价值,而且也具有一定的实际意义。此文发表后马上得到国际上许多同行专家(甚至是这一研究领域的权威专家)的关注和好评,也得到了国际上的广泛引用。陈化曾应邀多次在国内外的著名大学和研究所(包括Berkeley大学、牛津大学、Bonn大学、东京大学和莱比锡马普数学所等)报告过这方面的成果。2005年陈化曾应邀参加在日本大阪大学举办的第五届东亚偏微分方程国际学术会议并以大会邀请报告人的身份作了一小时关于这方面的综述报告,陈化报告的内容主要来自这篇论文。接下来陈化和他的博士生们在这一研究领域还有一些后续的工作(发表在IMA Appl. Math., Math. Nach., CPAA和KRM上),他们在这—研究领域的工作,特别是代表作[1],近期还曾前后在这—研究领域的两篇综述性长文(一篇是Horsmann2003年发表的长达82页的综述文章:“From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences I&II”,另一篇是Bellomo-Bellouquid-Tao在2015年发表在M3AS上的长达101页的综述性文章“Toward a mathematical theory of Keller–Segel models of pattern formation in biological tissues”)中多次被提到。

(2) 具正则奇异性非线性全特征方程Cauchy问题的研究,始于陈化和日本数学家Tahara教授,他们实际上证明了这类具正则奇性的全特征退化非线性偏微分方程的Cauchy-Kowalevskaja型定理;接下来对具非正则奇异性的非线性全特征方程Cauchy问题,由于其解是发散的,所以对应的Cauchy-Kowalevskaja型定理只能在解析Gevrey类里成立,这时精确刻画Gevrey适定类指标成为了问题的关键。代表作[2]是这一研究领域的开创性工作,引起了国际上同行专家(主要在日本和法国)的广泛关注和引用,并且他们的工作在日本和法国还带动了多位博士和博后的跟进研究。2006年陈化曾应邀在Kyoto大学的RIMS研究所举办的国际大会上作这一研究领域的一小时的综述报告,2009年陈化又应邀在法国Toulouse三大举办的国际会议了做了一小时邀请报告也是报告这方面的研究成果。

(3) 在代表作[3]中项目完成人改进和利用了乘子的思想,这在后继的工作中被用来证明了Helffer-Nier猜想在一定条件下是成立的。对于这方面的工作法国Lerner教授曾给予了很高的评价,他在一篇给李维喜的评价报告中曾这样写道:“In that paper, he proves compactness of the resolvent for the Fokker-Planck Operator under very mild assumptions on the potential V and he improves the known classical results on the topic. His method is quite original and is exploiting the very particular structure of the Fokker-Planck equation; he obtains also under his assumptions that the compactness of the resolvent of the Witten Laplacian implies the same property for the Fokker-Planck operator”。

对代表作[4]我们在数学上严格证明了空间齐性的拟线性Landau方程Cauchy问题弱解的解析正则性效应,审稿人对我们论文的评价是:“This is a natural conjecture, in view of the results of Desvillettes and Villani, which are properly referred to in the submitted paper. However, as far as I know, this is the first actual proof of the statement”

代表作[5]首次研究了空间非齐性的Boltzmann方程的最佳正则性问题，这是一个很引人关注的问题，所以项目完成人的工作刚刚出来就马上引起了微局部分析专家Lerner和Morimoto等人的关注和跟进研究。他们首先认真研究了代表作[5]中的结果和方法，在他们的跟进工作中，先完整地叙述了项目完成人的结果和方法，然后花了大量的篇幅（长达50页）和极为精细的微局部能量估计，推导出了比我们的结果更为精确的次椭圆估计，从而得到了空间非齐性的Boltzmann方程的最佳正则性。Lerner和Morimoto等人的工作2012年发表在CPDE的第一期上，仅比代表作[5]（发表在2011年CPDE的第四期上）的发表晚了几个月。项目完成人的研究工作能够这么快的被一些国际著名的微局部分析专家跟进，这也充分反映了他们的研究工作是处于国际前沿的。

对代表作[6]中关于二维Monge-Ampère方程的工作，审稿人评论是“The result presented in this paper is of interest and worth publishing. The authors show that in two dimensions solutions to subellipticMonge-Ampère equations preserve Gevrey classes, this extends known results for the C^∞ -class. Moreover, the authors indicate that the results are sharp in some particular cases.”

对于代表作[8]关于水波自由表面解析正则性的结果，审稿人称赞该文“The main improvement in the present paper is that all streamlines are proved to be analytic, whereas Constantin and Escher had to exclude the free surface. In addition, Constantin and Escher only considered analyticity, whereas here Gevrey regularity is also studied. Finally, the method used in this paper is more straightforward and completely local, meaning that it allows for a uniform treatment of both periodic and solitary waves and finite or infinite depth”。

(4) 代表作[7]发表在Calculus of Variation and PDE杂志上，评审人认为论文的研究成果是“extremely non-trivial”。由于在代表作[7]中，作者在锥Sobolev空间上，首次证明了锥Sobolev不等式，锥Morrey不等式和锥Poincare不等式等重要结果，这些分析工具不光是可来用于研究这类非线性问题解的存在性，而且这些结果在分析上也有其自身的重要性。所以审稿人在评价中特别提到：“The authors employ techniques from the analysis of operators on manifolds with conical singularities, combined with some necessary inequalities that are prepared before for weighted cone Sobolev spaces. The first part of the paper is devoted to some useful analogues of classical inequalities, here for weighted spaces in the conical case, cf. Theorems 2.1 and 2.3, 2.4, 2.5. Those may also be of independent interest.”在评价继代表作[7]之后发表在JDE的工作时，审稿人写道：“The authors make use, in particular, of integral inequalities, that they obtained in some of their previous papers, namely, a Sobolev and a Poincare inequality for the conical spaces. The materials which are presented are interesting, and contribute to expand the theory of totally characteristic elliptic equations in a new, previously unexplored, direction. The topics involved in this analysis are connected with important subjects of modern research in the theory of partial differential equations. I strongly recommend to accept this paper for publication in the Journal of Differential Equations.”

代表性论文专著目录:

- [1] Yin Yang, **Hua Chen**, Weian Liu, On existence of global solutions and blow-up to a system of reaction diffusion equations modeling chemotaxis, *SIAM J. Math. Analysis*, 33(4), 2001, 763-785
- [2] **Hua Chen, Zhuangchu Luo**, H. Tahara, Formal solutions of nonlinear first order totally characteristic type PDE with irregular singularity, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, vol. 51, no. 6 (2001), 1599-1620
- [3] **Hua Chen, Weixi Li**, Chao-Jiang Xu, Gevrey Hypocoellipticity for linear and nonlinear Fokker-Planck equations, *J. Diff. Equa.*, vol. 246 (2009), 320-339
- [4] **Hua Chen, Weixi Li**, Chao-Jiang Xu, Analytic smoothness effect of solutions for spatially homogeneous Landau equation, *J. Diff. Equa.*, vol. 248 (2010), 77-94
- [5] **Hua Chen, Weixi Li**, Chao-Jiang Xu, The Gevrey hypoellipticity for a class of Kinetic equations, *Comm. in PDE*, vol. 36, no. 4. (2011), 693-728
- [6] **Hua Chen, Weixi Li**, Chao-Jiang Xu, Gevrey regularity of subelliptic Monge-Ampere equations in the plane, *Advances in Mathematics*, vol. 228 (2011), 1816-1841
- [7] **Hua Chen, Xiaochun Liu**, Yawei Wei, Cone Sobolev inequality and Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations on a manifold with conical singularities, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, vol. 43 (2012), 463-484
- [8] **Hua Chen, Wei-Xi Li**, Ling-Jun Wang, Regularity of traveling free surface water waves with vorticity, *J Nonlinear Sci.*, vol. 23 (2013), 1111-1142.

主要完成人情况:

- 1) 陈化, 排名 1, 武汉大学数学与统计学院院长, 二级教授, 工作单位: 武汉大学, 完成单位: 武汉大学, 是该项目主要负责人。对本项目的发现点(1)、(2)、(3)和(4)均有重要贡献, 是代表性论文[1-8]的作者之一。他在这四个方面的工作包括: 1) 研究了退化型 chemotaxis 方程组的初边值问题解的整体存在和爆破; 2) 研究了具非正则奇性的非线性全特征偏微分方程 Cauchy 问题及对应的 Cauchy-Kowalevskaja 定理; 3) 利用创新的乘子方法和精细的微局部能量估计证明了多类退化动理学问题解的最佳正则性和光滑性效应等; 4) 利用创新的锥型的 Sobolev 不等式等证明了奇异流形上的退化型非线性椭圆方程的解的存在性问题。
- 2) 刘晓春, 排名 2, 四级教授, 工作单位: 武汉大学, 完成单位: 武汉大学。该完成人主要参与了项目中发现点(4)“奇异流形上的退化型非线性椭圆边值问题解的存在性和正则性”的研究, 代表性论文[7]的作者之一。她的贡献在于: 首先证明了锥型的 Sobolev 不等式和 Poincare 不等式等, 并运用这些分析工具以及现代变分理论来证明对应的奇异流形上锥形退化的非线性椭圆方程的正解和多解存在性结果, 这些结果的建立引出了一个研究奇异流形上退化型非线性方程的新方向, 并在他们的后续工作中已经被推广到研究更为复杂的楔性 (edge) 和角型 (corner) 奇异性流形上的非线性退化方程。
- 3) 李维喜, 排名 3, 四级教授, 工作单位: 武汉大学, 完成单位: 武汉大学, 该完成人主要参与了项目中发现点(3)的研究工作, 代表性论文[3,4,5,6,8]的作者之一。具体包括: 1) 利用与经典的 Kohn 方法以及 Rothschild-Stein 冪零李群方法不同的新的乘子方法得到了 Fokker-Planck 算子的最佳的亚椭圆估计; 2) 利用微局部分析方法给出了由 Desvillettes 和 Villani 的工作所衍生的关于动力学方程 Gevrey 类(或者解析类)光滑性效应猜想的严格的数学证明; 3) 改进了 Constantin 和 Escher 在 2011 年发表在 Annals of Math. 的结果, 将他们要求对旋度函数的解析正则性假设改进到仅要求旋度函数是 Hölder 连续的; 4) 利用精细的估计和 Legendre 变换得到完全非线性退化椭圆方程的最佳 Gevrey 正则性。
- 4) 罗壮初, 排名 4, 副教授, 工作单位: 武汉大学, 完成单位: 武汉大学。该完成人主要参与了项目中发现点(2)的研究工作, 代表性论文[2]的作者之一。他的贡献在于: 首次研究了具非正则奇性的非线性全特征偏微分方程的 Cauchy 问题在解析 Gevrey 函数类里的适定性问题, 证明了这类方程的 Cauchy 问题在解析 Gevrey 类中存在唯一形式解, 并且给出其 Gevrey 适定类指标的精确刻画。此外, 得到了这类方程的形式冪级数解的 k-Borel 可和性。

完成人合作关系说明：

项目组三位完成人刘晓春、李维喜、罗壮初都是项目第一完成人陈化过去在武汉大学指导的博士生，所以他们有长期的合作研究关系。

具体如下：

1) 在奇异流形上的退化型非线性椭圆边值问题解的存在性问题方面，项目完成人陈化与刘晓春在 2010 年 10 月-2013 年 8 月期间合作论文多篇，代表性论文[7]“Cone Sobolev inequality and Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations on a manifold with conical singularities”，2011 年 3 月在线发表，2012 年见刊。

2) 在正则和非正则型非线性全特征退化方程解的存在性和发散解的可和性问题方面，项目完成人陈化与罗壮初自 2001 年-2012 年合作论文多篇，代表性论文[2]“Formal solutions of nonlinear first order totally characteristic type PDE with irregular singularity” 2001 年 6 月发表。

3)在 Fokker-Planck 算子的亚椭圆估计及其在谱分析方面的应用方面，项目完成人陈化与李维喜在 2008 年合作代表性论文[3]“GevreyHypoellipticity for linear and nonlinear Fokker-Planck equations”，2008 年 7 月在线发表，2009 年见刊。

4)在动理学方程的解析 Gevrey 类微局部分析方面，项目完成人陈化与李维喜在 2009 年 -2011 年合作代表性论文 [4] “Analytic smoothness effect of solutions for spatially homogeneous Landau equation”，2009 年 8 月在线发表，2010 年见刊；以及代表性论文[5]“The Gevrey hypoellipticity for a class of Kinetic equations”，2011 年 1 月在线发表，2012 年见刊。

5) 在退化 Monge-Ampère 方程的解析 Gevrey 类正则性方面，项目完成人陈化与李维喜在 2011 年合作代表性论文[6]“Gevrey regularity of subelliptic Monge-Ampere equations in the plane”，2011 年 7 月在线发表，2011 年见刊。

6)在带旋度水波的行波解的正则性研究方面，项目完成人陈化与李维喜在 2013 年合作代表性论文[8]“Regularity of traveling free surface water waves with vorticity” 2013.8 月在线发表，2013 年见刊。

知情同意证明：

1)代表性论文[1] “On existence of global solutions and blow-up to a system of reaction diffusion equations modeling chemotaxis”的第一作者为华中科技大学数学与统计学院杨茵教授，已出具知情同意证明。

2)代表性论文[7] “Cone Sobolev inequality and Dirichlet problem for nonlinear elliptic equations on a manifold with conical singularities”，的通讯作者为南开大学数学与科学学院魏雅薇副教授，已出具知情同意证明。

华中科技大学数学与统计学院

知情报奖同意证明

本人杨茵，与陈化和刘伟安合作发表以下论文：

“On existence of global solutions and blow-up to a system of reaction diffusion equations modelling chemotaxis, SIAM J. Math. Analysis, 2001 年 33 卷 4 期 763-785 页”。

在该篇论文中，陈化教授作为通讯作者参与了论文的选题，写作，推导以及投稿事宜，他对论文的撰稿和发表是全权负责的。

本人同意上述论文作为陈化教授申报 2017 年度国家自然科学基金的支撑材料。



杨茵（签字）

华中科技大学数学与统计学院

2016.12.23



南 开 大 学
NANKAI UNIVERSITY
94 Weijin Road, Tianjin
People's Republic of China

知 情 报 奖 同 意 证 明

本人魏雅薇，与陈化和刘晓春合作发表以下论文：

“Cone Sobolev inequality and Dirichlet problem for nonlinear elliptic equation on a manifold with conical singularities, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 2012 年 43 卷 463-484 页”。

在该篇论文中，陈化教授作为第一作者，本人作为通讯作者，刘晓春作为第二作者参与了论文的选题，写作，推导以及投稿事宜，陈化对论文的撰稿和发表是全权负责的。

本人同意上述论文作为陈化教授和刘晓春教授申报 2017 年度国家自然科学基金的支撑材料。

魏雅薇（签字）

A handwritten signature in black ink, appearing to read '魏雅薇'.

南开大学数学科学学院

2016.12.23